* *Note added in proof:* After completion of the manuscript, it was brought to our attention that tunable Raman emission was generated, using a neodym laser tuable within a range of 200 cm^{-1} and pyridine as a Raman medium. R. V. Ambartsumyan, V. M. Apatin, and V. S. Letokhov, JETP Letters **15**, (6), 237 [1972].

1 C. K. N. Patel and E. D. Shaw, Phys. Rev. Lett. **24**, 451 [1970].

2 J. B. Marling, D. W. Gregg, and L. Wood, Appl. Phys. Lett. **17**, 527 [1970].

3 W. Schmidt, W. Appt, and N. Wittekindt, Z. Naturforsch. **27 a**, 34 [1972].

4 R. W. Minck, R. W. Terhune, and W. G. Rado, Appl. Phys. Lett. **3**, 181 [1963].

5 N. Bloembergen and Y. R. Shen, Phys. Rev. Lett. **13**, 720 [1964].

Inkohärente Lichtstreuung an Ladungsdichteschwankungen schwach ionisierter Plasmen in Magnetfeldern

G. Klingenberg und E. W. Richter

Lehrstuhl B für Theoretische Physik
Technische Universität Braunschweig

(Z. Naturforsch. **27 a**, 1375—1376 [1972]; eingegangen am 9. Juni 1972)

Incoherent Scattering of Light from Charge-Density Fluctuations in Weakly Ionized Magnetoplasmas

The spectral density of light scattering from weakly ionized plasmas embedded in a homogeneous magnetic field $\boldsymbol{B}$ is given by the work of Williams and Chappell [1, 2] and Klingenberg [3]. The spectral density has been computed for electron plasmas and is analyzed for the case $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{k}$ is the difference between the wave vectors of the incident wave and the scattered wave) in the regimes $k D \gg 1$ and $k D \ll 1$ (D is the Debye length).

Wird ein Plasma durch eine monochromatische elektrische Welle (Laser) angeregt, so entsteht eine Streustrahlung, deren spektrale Intensität gemessen werden kann.

Williams und Chappell [1, 2] und Klingenberg [3] betrachten ein Dreikomponentenplasma, in dem die Stöße zwischen geladenen und neutralen Teilchen durch einen BGK-Ansatz [4] beschrieben werden. Aus den Zweiteilchen-Korrelationsfunktionen läßt sich die spektrale Dichte $S(\boldsymbol{k}, \omega)$ der Streustrahlung berechnen:

$$S(\boldsymbol{k}, \omega) = -\frac{2(k D)^2}{\omega} \operatorname{Re} \frac{i(1-B_i/F_i)\, B_e/F_e}{1-B_i/F_i-B_e/F_e} \tag{1}$$

$\omega = \omega_2 - \omega_1$ und $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_1$ bezeichnen die Differenzen der Frequenzen und Wellenzahlvektoren von einfallender (ω_1; $\boldsymbol{k}_1$) und gestreuter (ω_2; $\boldsymbol{k}_2$) Welle; D ist die Debye-Länge. Die Größen B_e, F_e bzw. B_i, F_i lassen sich auf einfachere Integrale K_e bzw. K_i zurückführen:

$$B_e = -\frac{1}{(k D)^2}\,(F_e + i\,\omega\,K_e)\,; \tag{2 a}$$

$$B_i = -\frac{1}{(k D)^2}\,(F_i + i\,\omega\,K_i) \tag{2 b}$$

$$F_e = 1 - \nu_{e0} K_e\,; \qquad F_i = 1 - \nu_{i0} K_i \tag{3 a, b}$$

ν_{e0} bzw ν_{i0} sind die Stoßfrequenzen der Elektronen bzw. Ionen mit den Neutralteilchen.

Die Integrale K_e und K_i sind in einer für numerische Auswertungen zweckmäßigen Form darstellbar (Klingenberg [3]):

$$K_e = \lim_{s \to -i\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{ne} \int_{-\infty}^{-\infty} du \frac{f_e(u)}{s + i\,k\,u \cos\Theta + \nu_{e0} + i\,n\,\omega_c}\,, \tag{4 a}$$

$$K_i = \lim_{s \to -i\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{ni} \int_{\infty}^{\infty} du \frac{f_i(u)}{s + i\,k\,u \cos\Theta + \nu_{i0} + i\,n\,\Omega_c}\,. \tag{4 b}$$

In (4) bezeichnet s eine komplexe Variable; ω_c bzw. Ω_c die Gyrofrequenz der Elektronen bzw. Ionen; Θ den Winkel zwischen dem Wellenzahlvektor $\boldsymbol{k}$ und der Richtung des äußeren Magnetfeldes $\boldsymbol{B}$; f_e bzw. f_i die eindimensionale Maxwell-Geschwindigkeitsverteilungsfunktion der Elektronen bzw. Ionen. In den Größen X_{ne} bzw. X_{ni} treten modifizierte Bessel-Funktionen $I_n(\lambda)$ erster Art der Ordnung n auf:

$$X_{ne} = \exp\left\{-\frac{k^2 v_e^2 \sin^2\Theta}{\omega_c^2}\right\} I_n\left(\frac{k^2 v_e^2 \sin^2\Theta}{\omega_c^2}\right); \tag{5 a}$$

$$X_{ni} = \exp\left\{-\frac{k^2 v_i^2 \sin^2\Theta}{\Omega_c^2}\right\} I_n\left(\frac{k^2 v_i^2 \sin^2\Theta}{\Omega_c^2}\right). \tag{5 b}$$

v_e bzw. v_i ist die thermische Geschwindigkeit eines Elektrons bzw. Ions.

Im Grenzfall verschwindender Stoßfrequenzen ν_{e0}, ν_{i0} ergibt sich mit (2) bis (5) aus (1) das Ergebnis von Salpeter [5] [Gl. (17)].

Im folgenden diskutieren wir nur jenen Teil des Streuspektrums, für den allein die Elektronenbewegung wesentlich ist, d. h. $\omega \gg k\,v_i$ und $\omega \gg \Omega_c$. Dann gilt $B_i/F_i = 0$ und (1) vereinfacht sich zu

$$S(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{2(k D)^2}{\omega} \frac{\varepsilon_i(\boldsymbol{k}, \omega)}{\varepsilon_r^2(\boldsymbol{k}, \omega) + \varepsilon_i^2(\boldsymbol{k}, \omega)}\,, \tag{6}$$

wobei für die Dielektrizitätskonstante ε_L (Index L kennzeichnet, daß nur Raumladungsschwankungen berücksichtigt wurden) gilt

$$\varepsilon_L = \varepsilon_r + i\,\varepsilon_i = 1 - (B_e/F_e)\,. \tag{7}$$

Die Maxima der Spektrallinien liegen für $|\varepsilon_i| \ll |\varepsilon_r|$ bei Frequenzen $\omega = \omega_M$, die sich als Lösungen der Dispersionsgleichung $\varepsilon_r(\boldsymbol{k}, \omega) = 0$ ergeben.

In der Umgebung von $\omega = \omega_M$ liefert (6) für jeden Wert von $\boldsymbol{k}$ ein Lorentz-Profil

$$S(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{2(k D)^2}{\omega_M\,\varepsilon_r'|_\omega} \frac{A(\boldsymbol{k}, \omega_M)}{(\omega - \omega_M)^2 + A^2(\boldsymbol{k}, \omega_M)} \tag{8}$$

mit der Linienbreite

$$A(\boldsymbol{k},\omega_M) = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r'}\bigg|_{\omega_M} ; \qquad \varepsilon_r' = \frac{d\varepsilon_r}{d\omega} . \tag{9}$$

Wird über einen Frequenzbereich $\Delta\omega$ in der Umgebung von ω_M integriert und gilt $\Delta\omega \gg A$, so folgt für die integrierte spektrale Dichte einer Linie:

$$P(\boldsymbol{k},\omega_M) = 2\pi \frac{(k D)^2}{\omega_M \, \varepsilon_r' |_{\omega_M}} . \tag{10}$$

Besonders interessant ist das Streuspektrum für den Fall $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{B}$ $(\Theta = \pi/2)$, da sich wegen der verschwindenden Landau-Dämpfung ohne Berücksichtigung von Teilchenstößen δ-förmige Spektrallinien ergeben (vgl. SALPETER [5]). Für $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{B}$ folgt mit $\lambda = k^2 v_e^2/\omega_c^2$ für die Integrale (2) und (3)

$$B_e = -\frac{1}{\lambda}\frac{\omega_p^2}{\omega_c^2}\left(1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{ne} \frac{\omega + i\nu_{e0}}{n\,\omega_c - (\omega + i\nu_{e0})}\right)$$

$$= \frac{2}{\lambda}\frac{\omega_p^2}{\omega_c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\omega_c^2}{(\omega+i\nu_{e0})^2 - n^2\omega_c^2} X_{ne} , \tag{11}$$

$$F_e = 1 - i\nu_{e0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{ne}\frac{1}{\omega + i\nu_{e0} - n\,\omega_c} \tag{12}$$

und mit Hilfe von (7)

$$\varepsilon_L = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_{ne}}{\frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{\omega+i\nu_{e0}}{n\,\omega_c}\right)^2 - 1\right]} \cdot \frac{1}{1 - i\nu_{e0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{ne}\frac{1}{\omega+i\nu_{e0}-n\,\omega_c}} . \tag{13}$$

Aus (6) ergibt sich mit (13) die spektrale Dichte im Fall ruhender Ionen und $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{B}$. Für die beobachtbaren Extremfälle $k \gg D^{-1}$ bzw. $k \ll D^{-1}$ ist die individuelle bzw. kollektive Bewegung der Elektronen wesentlich. In diesen Fällen läßt sich die spektrale Dichte weiter vereinfachen.

a) Wird angenommen, daß die Gyrofrequenz ω_c nicht um eine oder mehrere Größenordnungen größer ist als die Plasmafrequenz ω_p, so folgt aus der Bedingung für den individuellen Bereich $k D \gg 1$ auch $\lambda = [(k^2 v_e^2)/\omega_c^2] \gg 1$. Dann ist eine asymptotische Entwicklung der Bessel-Funktion $I_n(\lambda)$ und damit der Größe $X_{ne}(\lambda)$ möglich. In niedrigster Näherung folgt $I_n(\lambda) = (2\pi\lambda)^{-1/2} e^{\lambda}$ und eingesetzt in (13) ergibt sich für (6):

$$S(\boldsymbol{k},\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega_c}{k v_e}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\nu_{e0}}{(\omega - n\,\omega_c)^2 + \nu_{e0}^2} . \tag{14}$$

Das Spektrum besteht also aus unendlich vielen Lorentz-Linien, deren Breite gleich der Stoßfrequenz ν_{e0} ist. Alle Linien liegen bei Vielfachen der Gyrofrequenz ω_c. In dieser Näherung ist die Intensität aller Linien gleich; sie ist proportional zu $\omega_c/k v_e$, also zur Magnetfeldstärke B und zur Wurzel der reziproken Temperatur $1/T$.

b) Ist das äußere Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ so stark, daß die Gyrofrequenz ω_c nicht um eine oder mehrere Größenordnungen kleiner ist als die Plasmafrequenz ω_p, so folgt $\lambda \ll 1$ aus der Näherung für den kollektiven Bereich $k D \ll 1$. Die Reihenentwicklung ergibt, wenn bis zu Gliedern in λ^2 entwickelt wird:

$$X_{0e} = 1 - \lambda + \tfrac{3}{4}\lambda^2 ; \quad X_{1e} = \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{2} ; \tag{15 a}$$

$$X_{2e} = \frac{\lambda^2}{8} ; \quad \underset{n>2}{X_{ne}} = 0 \tag{15 b}$$

Damit folgt aus (13), wenn nur lineare Glieder in λ berücksichtigt werden:

$$\varepsilon_L(\boldsymbol{k},\omega) = 1 - \omega_p^2\frac{\omega+i\nu_{e0}}{\omega}\left\{\frac{1-\lambda}{(\omega+i\nu_{e0})^2 - \omega_c^2} + \frac{\lambda}{(\omega+i\nu_{e0})^2 - 4\,\omega_c^2} + \frac{i\nu_{e0}}{\omega}\frac{\lambda\,\omega_c^2}{[(\omega+i\nu_{e0})^2 - \omega_c^2]^2}\right\} . \tag{16}$$

Diese in λ lineare Näherung gibt nicht das Ergebnis von PLATZMAN, WOLFF und TZOAR [6] wieder. In nullter Näherung ergibt sich

$$\varepsilon_L(\omega) = 1 - \frac{\omega+i\nu_{e0}}{\omega}\frac{\omega_p^2}{(\omega+i\nu_{e0})^2 - \omega_c^2} \tag{17}$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis von Platzman, Wolff und Tzoar. Die Frequenz der Linienmaxima folgt aus Gl. (17) durch $\varepsilon_r = 0$. Wird für die Stoßfrequenz $\nu_{e0} \ll \omega_c, \omega_p$ vorausgesetzt, so besteht das Spektrum [da (17) nur in nullter Näherung in λ gilt] aus nur zwei Linien $\omega_2 - \omega_1 = \pm\omega_M$ bei der oberen Hybridfrequenz $\omega_M = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_c^2}$. Aus Gl. (9) folgt für die Linienbreite

$$A(\omega_M) = \frac{\nu_{e0}}{2}\frac{\omega_p^2 + 2\,\omega_c^2}{\omega_p^2 + \omega_c^2} \tag{18}$$

und für die integrierte spektrale Dichte nach (10)

$$P(k,\omega_M) = \pi (k D)^2 \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 + \omega_c^2} = \pi\lambda\frac{\omega_c^2}{\omega_p^2 + \omega_c^2} \tag{19}$$

Wie man sieht, geht die Intensität dieser Spektrallinie nach Null für $\lambda \to 0$.

[1] R. H. WILLIAMS u. W. R. CHAPPELL, Phys. Fluids **14**, 591 [1971].

[2] W. R. CHAPPELL u. R. H. WILLIAMS, Phys. Fluids **14**, 1938 [1971].

[3] G. KLINGENBERG, Inkohärente Lichtstreuung an Dichteschwankungen schwach ionisierter Plasmen in Magnetfeldern; Diplomarbeit, Techn. Universität Braunschweig 1971.

[4] P. L. BHATNAGAR, E. P. GROSS u. M. KROOK, Phys. Rev. **94**, 511 [1954].

[5] E. E. SALPETER, Phys. Rev. **122**, 1663 [1961].

[6] P. M. PLATZMAN, P. A. WOLFF u. N. TZOAR, Phys. Rev. **174**, 489 [1968].